5パズルの最短手数とその配置

愛媛県立三崎高等学校
中田　智貴・檜垣　将之・島崎　莉生・大石　翔生（指導教員：谷脇　　翔）

概要

数学パズルの1つに「15パズル」がある。15パズルには解けるパズルと解けないパズルがあるが，解けるパズルに関しては，15パズルの中にある任意の5パズル（２×３－１パズル）を順番にスライドすることで15パズルを解くことができる。本研究では5パズルに着目し，解ける5パズルの最短手数の最大値とその配置について，実際にパズルを動かしながら考察することで結果を究明することができた。

15パズルとは

● １～15の番号が書かれた15個の正方形の駒を４×４の碁盤目状のボードで１つだけ空いた箇所にスライドすることによって，左上から右に向かって番号順に並べるパズルのことである。（図1）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

（図1）

●15パズルには解けるパズル（図2）と解けないパズル（図3）がある。解けないパズルに関しては数字が１つ逆転するだけで解けなくなる。

1	7	2	4
9	5	3	8
	6	10	11
13	14	15	12

（図2）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

（図3）

背景・目的

［背景］
8パズルや15パズルに関しては，コンピューターを用いた計算によって，最短手数の最大値について結果が報告されているが，理論的に得られた結果ではない。

［目的］
15パズルを解く上で重要な役割を果たす，5パズルに着目し，5パズルの最短手数とその配置について，コンピューターを用いず，実際にパズルを動かしながら考察し，結果を究明することを目的とする。

方法

解くことができる5パズルは$\frac{6!}{2}$=360より，360通りである。しかし，それら全てのパズルを１つずつ動かして最終形のパズル（図4）にしていくと余分な手数が含まれ，最短手数を考察することは難しい。

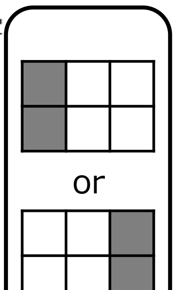
1	2	3
4	5	

（図4）

［種類分け］

❶図5のように黒のマスに，縦に並んでいる2つの数字を固定し，白のマスにある残りの3つの数字と空白をスライドさせる。

❷❶の方法で得られた配置を1種類として考えると，空白が中列に移動したとき，そのとき固定していた黒のマスとは反対側のマスを固定して同じようにスライドさせる。すると，異なる種類の配置を見つけられる。



（図5）

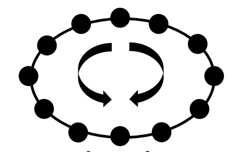
❸1種類の配置の数は$\frac{4!}{2}$より12通りとなる。異なる種類へ移行できる配置は6通りある。

方法

［パズルを円で考える利点］

●余分な配置が出てこないので，最短手数を効率的に求められる。

●ループしているパズルを見つけやすい。

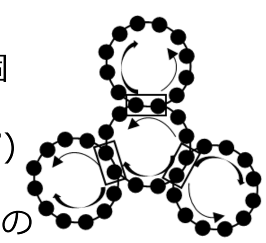


（図6）
●はパズル

結果

5パズルを動かしていくことで，以下の結果が得られた。

●左右どちらかの縦2つの数字を固定して残りの3つの数字と空白をスライドさせたとき，12個の配置が出てくる。これを1つの円とするとその円に3つの円が重なることがわかった。(図7)



（図7）

●最終形パズルの円から一番遠い7つ目の円の中の配置に最短手数の最大値となる配置があり，その配置は図8のような最終形パズルの上下を反転させた配置であった。そのときの最短手数の最大値は21であった。

4	5	
1	2	3

（図8）

●最終形パズルが含まれる円を1つ目の円として考えたとき，図8の配置を含む円は7つ目に位置していた。7つ目に位置していた円は図8の配置を含む円ただ1つだった。

考察

●15パズルと８パズルの最短手数の最大値はそれぞれ，80，31であった。
●5パズルの最短手数の最大値は31未満であると予想していた。

●5パズルの最短手数の最大値は21であり，予想と一致している。

●これらと同様のパズルにおいて，最短手数の最大値における配置には対称性があると考えた。
⇒本研究に関連する論文によると，
15パズル：パズルの対角線上に対称性がある。
8パズル：上下の反転はなく，対称性はなかった。

結論

パズルを実際に動かし，配置に応じて分類し，円状に並べながら整理していくと，解ける5パズルの総数である360通りすべての流れを解明することができた。その結果，最短手数は21であり，その配置は図8のとおりである。

4	5	
1	2	3

（図8）

今後の課題

●今回の5パズルに関する研究で用いた方法や考え方を，15パズルの解法に応用できないかについて考えたいと思う。